Determinarea constantei elastice a unui resort

Scopul lucrării:

Determinarea constantei elastice a unor resorturi prin două metode diferite: metoda statică şi metoda dinamică.

I. Consideraţii teoretice

I.1. Metoda statică

Considerăm un resort de lungime iniţială l_0, constantă elastică k şi masă negiljabilă, fixat la un capăt (Fig. 1a). Dacă la capătul inferior al resortului se atârnă un corp de masă M, atunci sub acţiunea forţei de greutate, $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$, resortul se alungeşte cu Δl (Fig. 1b).

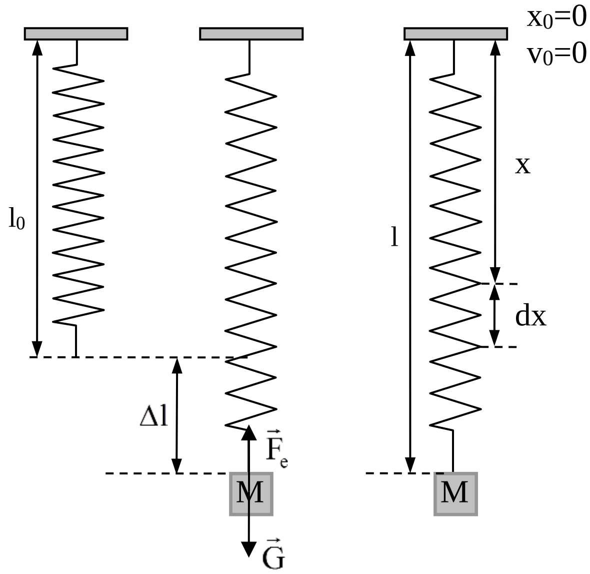

Fig. 1.

Sub acţiunea acestei greutăţi resortul se alungeşte până îşi atinge poziţia de echilibru, atunci când, forţa de greutate este compensată de forţa elastică $\vec{F}_e = -k \cdot \Delta\vec{l}$, adică:

$$\vec{G} = \vec{F}_e \quad \text{sau} \quad M \cdot g = k \cdot \Delta l \qquad (1)$$

de unde se obţine constanta elastică a resortului:

$$k = \frac{M \cdot g}{\Delta l} \qquad (2)$$

unde g este acceleraţia gravitaţională, g = 9,81 m/s^2.

I.2. Metoda dinamică

Scoatem sistemul, format din resort şi corp, din poziţia de echilibru, alungind resortul cu x_0 şi apoi îl lăsăm liber. Dacă neglijăm forţa de rezistenţă din partea mediului, sub acţiunea forţei elastice, $F_e = -k \cdot x$ sistemul va oscila liber cu amplitudinea A. Scriind legea a doua a dinamicii, se obţine ecuaţia de mişcare a sistemului:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \qquad (3)$$

Împărţind ecuaţia (3) cu M şi notând:

$$\frac{k}{M} = \omega_0^2 \qquad (4)$$

se obţine :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \tag{5}$$

unde ω_0 se numeşte pulsaţia proprie a sistemului. Soluţia ecuaţiei (5) este:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{6}$$

Constanta elastică, în metoda dinamică, se obţine din relaţia (4):

$$k = M \cdot \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot M \tag{7}$$

unde am folosit relaţia dintre perioada de oscilaţie, T şi pulsaţia proprie a sistemului:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{8}$$

Dacă masa resortului, m, nu este neglijabilă, trebuie luată în considerare contribuţia ei la perioada oscilaţiilor. Considerăm că masa resortului este uniform distribuită de-a lungul lungimii sale, astfel încât masa unui element de lungime dx, aflat la distanţa x de punctul de susţinere (Fig. 1c) este:

$$dm = \mu \cdot dx = \frac{m}{l} \cdot dx \tag{9}$$

unde $\mu = \frac{m}{l}$ este densitatea liniară de masă.

Dacă presupunem o variaţie liniară a vitezei de oscilaţie a resortului, de la $v_0 = 0$ (capătul fix al resortului este în repaus) până la $v_{max} = v$ (viteza capătului liber, considerată la trecerea prin poziţia de echilibru, atunci viteza elementului dx, aflat la distanţa x de capătul fix al resortului, este:

$$v_x = \frac{v}{l} \cdot x \tag{10}$$

Energia cinetică a elementului de masă dm este:

$$dE_c = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot v^2}{l^3} \cdot x^2 \cdot dx \tag{11}$$

Energia cinetică a întregului resort se calculează prin integrare:

$$E_c^{resort} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot v^2}{l^3} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3} \cdot v^2 \tag{12}$$

Energia cinetică totală maximă a întregului sistem (resort plus corpul de masă M) este:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left(M + \frac{m}{3} \right) \cdot v^2 \tag{13}$$

Pentru un oscilator armonic energia potenţială maximă este:

$$E_p = \frac{kA^2}{2} \tag{14}$$

Deoarece în cazul unui oscilator armonic avem o transformare periodică a energiei potenţiale în energie cinetică, şi invers, astfel încât energia totală a oscilatorului armonic este constantă, atunci energia cinetică maximă este egală cu energia potenţială maximă. Egalând relaţia (13) cu relaţia (14), se obţine constanta elastică a resortului prin metoda dinamică:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \left(M + \frac{m}{3} \right) \tag{15}$$

deoarece cu v am notat viteza maximă a oscilatorului: $v = v_{max} = A \cdot \omega$, iar $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

II. Metodica experimentală

II.1. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental constă dintr-un stativ pe care sunt fixate resorturile, ale căror constantă elastică urmează să fie determinată (Fig. 2). Pentru alungirea acestor resorturi se vor utiliza 3 greutăţi marcate. Alungirea resortului sub influenţa diferitelor greutăţi, se va măsura cu o riglă verticală ce permite măsurarea lungimii cu o precizie de 1 mm. În cazul metodei dinamice timpul se va măsura cu un cronometru electronic.

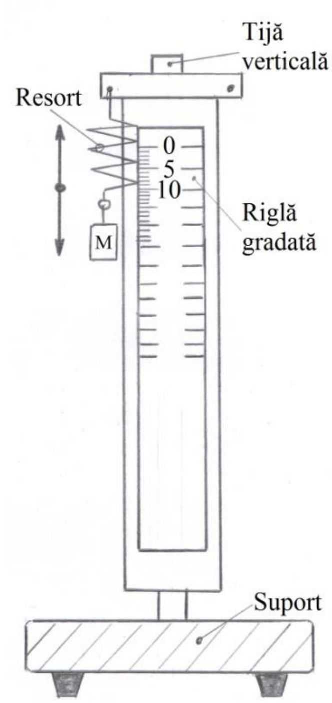

Fig. 2.

II.2. Modul de lucru

II.2.1. Metoda statică

i. Se măsoară lungimea l_0 a resortului nedeformat;

ii. Se atârnă pe rând masele M_1, M_2, etc. şi se măsoară de fiecare dată lungimile l_1, l_2, etc. ale resortului deformat;

iii. Se determină de fiecare dată alungirea resortului $\Delta l_1 = l_1 - l_0$, $\Delta l_2 = l_2 - l_0$, etc.;

iv. Datele obţinute se trec în tabelul 1.

Tabelul 1.

<table>
<tr><th>m (g)</th><th>M (g)</th><th>Δl (mm)</th><th>k (N/m)</th><th>$\overline{k}$ (N/m)</th><th>$\Delta k/k$ (%)</th><th>Δk (N/m)</th><th>$\Delta\overline{k}$ (N/m)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="6"></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

II.2.2. Metoda dinamică

i. Se atârnă de resort o greutate marcată şi se stabileşte poziţia de echilibru (repaus) a oscilatorului;

ii. Provocând o alungire iniţială de 2-3 cm se pune în oscilaţie sistemul format din greutatea marcată şi resort;

iii. Se cronometrează durata t în care sistemul efectuează un număr n = 20 de oscilaţii complete, şi se determină perioada de oscilaţie cu ajutorul relaţiei T= t/n;

iv. Se repetă operaţiile pentru trei corpuri marcate;

v. Datele obţinute se trec în tabelul 2.

Tabelul 2.

m (g)	M (g)	M+m/3 (kg)	t (s)	T (s)	k (N/m)	$\overline{k}$ (N/m)	Δk/k (%)	Δk (N/m)	$\Delta\overline{k}$ (N/m)

II.3. Prelucrarea datelor experimentale

II.3.1. Metoda statică

i. Se calculează constanta elastică cu relaţia (2);

ii. Se calculează:

$$\overline{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \qquad (16)$$

iii. Eroarea relativă se calculează cu relaţia:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l} \qquad (17)$$

iv. Se calculează cu relaţia: $\Delta k = a \cdot k$, deoarece $\frac{\Delta k}{k} = a$;

v. Se calculează:

$$\Delta\overline{k} = \frac{\Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_3}{3} \qquad (18)$$

vi. Rezultatele obţinute se trec în tabelul 1;

vii. Rezultatul final se scrie sub forma:

$$k = \overline{k} \pm \Delta\overline{k} \ \text{(N/m)} \qquad (19)$$

II.3.2. Metoda dinamică

i. Se calculează constanta elastică cu relaţia (15);

ii. Se calculează:

$$\overline{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \qquad (20)$$

iii. Eroarea relativă se calculează cu relaţia:

$$\frac{\Delta k}{k} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta M + \Delta\left(\frac{m}{3}\right)}{M + \frac{m}{3}} \tag{21}$$

unde:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta n}{n} \tag{22}$$

iv. Se calculează cu relaţia: $\Delta k = a \cdot k$, deoarece $\frac{\Delta k}{k} = a$;

v. Se calculează:

$$\Delta\bar{k} = \frac{\Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_3}{3} \tag{23}$$

vi. Rezultatele obţinute se trec în tabelul 2;

vii. Rezultatul final se scrie sub forma:

$$k = \bar{k} \pm \Delta\bar{k} \text{ (N/m)} \tag{24}$$

Bibliografie

1. P. Păşcuţă, L. Pop, M. Boşca, Fizică. Lucrări practice, Ed. U. T. Press, Cluj-Napoca, 2013.
2. I. Cosma, O. Pop, A Terțan, E. Hanga, I. Boscovitz, I. Lupșa, E. Papp, P. Lucaci, I. Pop, Fizica - Îndrumător pentru lucrări de laborator, Ed. Tehnică Cluj-Napoca, 1979;
3. R. Muntean, E. Culea, Fizică. Lucrări practice, Ed. U.T. Press Cluj-Napoca, 2004;
4. http://www.phys.utcluj.ro/PersonalFile/Cursuri/BarleaCurs.html;